مدل مداری برای محاسبات کوانتومی

وحید کریمی پور- دانشکده فیزیک - دانشگاه صنعتی شریف

۱۱ آبان ۱۴۰۱

۱ مقدمه

گیت کوانتومی یک عملگر یکانی است که روی بردارهای دلخواه عمل می کند. اگر یک حافظه‌ی n کیوبیتی داشته باشیم فضای هیلبرت حالت های آن عبارت است از $\mathcal{H}=\mathcal{C}^{2^{\otimes n}}$ که در آن $\mathcal{C}^2$ یک فضای دوبعدی مختلط است. بعد این فضا برابر است با 2^n و یک گیت دلخواه یعنی یک عملگر یکانی که روی این فضای هلیبرت عمل کند. چنین عملگری با یک ماتریسِ مربعی $2^n\times 2^n$ نشان داده می شود که دارای تعداد 2^{2n} پارامتراست، زیرا ماتریس های یکانی $N\times N$ دارای N^2 پارامترِآزاد هستند. به عنوان مثال فضای گیت های تک کیوبیتی یک فضای 4 پارامتری و فضای گیت های دو کیوبیتی یک فضای 16 پارامتری و فضای گیت های 10 کیوبیتی یک فضای 1048576 پارامتری است. دقت کنید که این فضاها همه پیوسته هستند و بی نهایت نقطه دارند که هر نقطه آنها نشان دهنده یک عملگر یکانی است و تعداد پارامترهایی که شمردیم تنها تعداد پارامتر ها لازم برای برچسب زدن روی نقاط این فضاها را مشخص می کند. به این ترتیب فضای سه بعدی متعارف دکارتی در مقابل همه این فضاها کوچک است زیرا هر نقطه اش تنها با سه پارامتر مشخص می شود. به این ترتیب با اولین دشواری خود در نظریه و هم چنین ساخت کامپیوترهای کوانتومی مواجه می شویم. آیا می توان با یک مجموعه متناهی از گیت ها، آنچنانکه در کامپیوترهای کلاسیک انجام می شود، تمام گیت های ممکن را پیاده سازی کرد؟ اگر بتوان یک مجموعه متناهی مثلِ $G:=\{G_1,G_2,\cdots G_K\}$ پیدا کرد که به کمک آنها بتوان تمام گیت های یکانی را پیاده سازی کرد، می گوییم مجموعه‌ی G یک مجموعه‌ی گیت های یونیورسال یا عام را تشکیل می دهد. درهمین ابتدا باید دو نکته مهم را توضیح دهیم.

نکته اول: مسلم است که با یک مجموعه متناهی هرگز نمی توان یک مجموعه پیوسته از گیت ها را پیاده سازی کرد مگر اینکه خود را قانع به پیاده سازی تقریبی از گیت ها کنیم. بنابراین فرض کنید که حدِ دقتی که در نظر داریم برابر با ϵ باشد. دراین صورت هرگاه بجای عملگرِ U ، با استفاده از گیت های عامِ خود عملگر $\tilde{U}$ را چنان بسازیم که شرط

$$E(U,\tilde{U}) := Max_{|\psi\rangle}||(U-\tilde{U})|\psi\rangle|| < \epsilon \qquad (۱)$$

برقرار شود، می گوییم که گیتِ U را با دقتِ خوب (یعنی با دقت قابل قبولِ ϵ) پیاده سازی کرده‌ایم.

نکته دوم: در پیاده سازی گیت ها مهم است که چه تعداد گیتِ یونیورسال برای ساختن یک گیت دلخواه استفاده می کنیم و این تعداد چه نسبتی با n یعنی تعداد کیوبیت ها و هم چنین دقتی که می خواهیم به کار ببریم یعنی ϵ دارد. اگر مجبورشویم که برای بالابردن دقت خود و یا تعداد کیوبیت ها تعداد گیت های یونیورسالی را که به کار می بریم به طور نمایی افزایش دهیم، بازهم پروژه ساخت کامپیوترهای کوانتومی با شکست مواجه خواهد شد. خوشبختانه چنین نیست و این موضوع نیز از دلایلی است که ما را به ساختن کامپیوترهای کوانتومی امیدوار می کند.

۲ مفهوم دقت در گیت های کوانتومی

دراین بخش می خواهیم مفهوم عملی رابطه 1 را بفهمیم. فرض کنید که قرار است روی حالتِ اولیه $|\psi\rangle$، گیتِ U اثر کند و حالتِ $|\phi\rangle$ تولید شود ولی اشتباهاً یا به خاطر عدم دقتی که ما در ساخت گیت های کوانتومی داریم گیتِ $\tilde{U}$ روی این حالت اثر می کند و حالتِ $|\tilde{\phi}\rangle$ تولید می شود. دراین صورت می خواهیم می خواهیم ببنیم که نتایج اندازه گیری روی حالت های $|\phi\rangle$ و $|\tilde{\phi}\rangle$ جقدر با هم تفاوت دارند. فرض کنید که E یک عملگرِ $POVM$ باشد که مربوط به یک نتیجه (یاخروجی) خاص باشد. دراین صورت احتمال مشاهده این نتیجه خاص را برای دو حالت باهم مقایسه می کنیم. داریم

$$P = \langle\phi|E|\phi\rangle = \langle\psi|U^\dagger E U|\psi\rangle, \qquad \tilde{P} = \langle\tilde{\phi}|E|\tilde{\phi}\rangle = \langle\psi|\tilde{U}^\dagger E\tilde{U}|\psi\rangle. \qquad (۲)$$

بنابراین

$$|\tilde{P}-P| = |\langle\tilde{\phi}|E|\tilde{\phi}\rangle - \langle\phi|E|\phi\rangle|. \qquad (۳)$$

حالتِ $|\Delta\rangle$ را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$|\Delta\rangle := |\tilde{\phi}\rangle - |\phi\rangle = |(\tilde{U} - U)|\psi\rangle|, \quad (۴)$$

درنتیجه می توانیم رابطه 3 را به شکل زیر بنویسیم:

$$|\tilde{P} - P| = |\langle\tilde{\phi}|E|\Delta\rangle + \langle\Delta|E|\phi\rangle|. \quad (۵)$$

حال نخست از نامساوی نامساوی مثلث $|a+b| \leq |a| + |b|$ و سپس از نامساوی کوشی_شوارتز استفاده می کنیم و نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} |\tilde{P} - P| &\leq |\langle\tilde{\phi}|E|\Delta\rangle| + |\langle\Delta|E|\phi\rangle| \\ &\leq ||\Delta|| + ||\Delta|| \\ &= 2||(\tilde{U} - U)|\psi\rangle|| \leq 2\epsilon. \end{aligned} \quad (۶)$$

در سطر دوم از این استفاده کرده ایم که بنا بر نامساوی کوشی ـ شوارتز

$$|\langle\tilde{\phi}|E|\Delta\rangle| \leq ||E|\tilde{\phi}\rangle|| \times ||\Delta|| \quad (۷)$$

و اینکه E یک عملگر مثبت است که بخشی از یک مجموعه عملگرهای مثبت $POVM$ است که مجموع همه آنها برابر با یک می شود. بنابراین

$$||E|\tilde{\phi}\rangle|| \leq ||\tilde{\phi}\rangle|| = 1. \quad (۸)$$

بنابراین اگر فاصله $E(\tilde{U}, U)$ از ϵ کمتر باشد، این امر به این معناست که نتایج همه اندازه گیری های ممکنی که روی یک حالت دلخواهِ $|\psi\rangle$ انجام می دهیم حداکثر به اندازه 2ϵ دچار خطا می شود.

حال فرض کنید که قرار است رشته ای از گیت های $U_1U_2\cdots U_N$ را روی یک حالت اعمال کنیم و به خاطر عدم دقتی که داریم رشته ی $\tilde{U}_1\tilde{U}_2\cdots\tilde{U}_N$ را روی آن حالت اعمال می کنیم که هر کدام از این گیت ها به معنایی که در بالا توضیح دادیم خطای ϵ دارند. می خواهیم ببنیم که خطای این رشته از گیت ها چه ربطی به N دارد. اگر این خطا رابطه ای نمایی با N داشته باشد، خبر بدی است. ولی نشان می دهیم که

$$E(\tilde{U}_1\tilde{U}_2\cdots\tilde{U}_N, U_1U_2\cdots U_N) \leq N\epsilon, \quad (۹)$$

که به معنای آن است که خطا به صورت خطی با تعداد گیت ها زیاد می شود، بنابراین کافی است که دقت اولیه گیت ها را به اندازه ϵ/N بالا ببریم تا خطای کل کمتراز ϵ باشد. برای اثبات رابطه 9 حالتِ $N=2$ را در نظر می گیریم که ایده کلی اثبات را در بردارد. می دانیم که به ازای هر حالتِ $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} &||(\tilde{U}_1\tilde{U}_2 - U_1U_2)|\psi\rangle|| = ||(\tilde{U}_1\tilde{U}_2 - U_1\tilde{U}_2)|\psi\rangle + (U_1\tilde{U}_2 - U_1U_2)|\psi\rangle|| \\ \leq\quad & ||(\tilde{U}_1\tilde{U}_2 - U_1\tilde{U}_2)|\psi\rangle|| + ||(U_1\tilde{U}_2 - U_1U_2)|\psi\rangle|| \\ \leq\quad & ||(\tilde{U}_1 - U_1)\tilde{U}_2|\psi\rangle|| + ||(U_1(\tilde{U}_2 - U_2)|\psi\rangle|| \end{aligned} \tag{۱۰}$$

حال برای جمله اول در سمت راست از تعریفِ $E(\tilde{U}_1, U_1)$ و برای جمله دوم نیز، بعد از اینکه U_1 را بدلیل اینکه نرم بردار را عوض نمی کند برداشتیم، از تعریفِ $E(\tilde{U}_2, U_2)$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم

$$||(\tilde{U}_1\tilde{U}_2 - U_1U_2)|\psi\rangle|| \leq E(\tilde{U}_1, U_1) + E(\tilde{U}_2, U_2). \tag{۱۱}$$

این اثبات به همین شکل برای N دلخواه تعمیم پیدا می کند.

۳ چند مثال ساده

در بخش آینده نشان خواهیم داد که چگونه به طور سیستماتیک می توان از یک مجموعه گیت های ابتدایی هر گیت دلخواه n کیوبیتی را ساخت. استدلالی که در بخش بعدی خواهد آمد یک استدلال کلی و وجودی است به این معنا که نشان می دهیم این کار علی الاصول امکان پذیر است. اما همواره لازم نیست که برای ساختن مدار از این روش استدلال بهره بجوییم چرا که در خیلی از موارد می توانیم با استفاده از شهود فیزیکی، تجربه عملی و یا روش های دیگر به سادگی مدار مورد نظر خود را بسازیم.

- تمرین: یک مدار کوانتومی بسازید که حالت های $|GHZ\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\cdots 0\rangle + |11\cdots 1\rangle)$ را بسازد.

- تمرین: یک مدار کوانتومی بسازید که از حالت ورودی $|00\rangle$

حالت

$$\cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle$$

را بسازد. اگر ورودی مدار را به $i, j = 0, 1$ $\quad |i, j\rangle,$ تغییر دهید چه حالت هایی ساخته خواهد شد.

■ تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|W_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(|100\cdots 0\rangle + |010\cdots 0\rangle + \cdots |000\cdots 1\rangle\right). \tag{۱۲}$$

رابطه بالا را می توان به شکل زیر نوشت:

$$|W_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}|1\rangle \otimes |000\cdots 0\rangle + \sqrt{\frac{n-1}{n}}|0\rangle \otimes |W_{n-1}\rangle. \tag{۱۳}$$

با استفاده از این رابطه تکرار مداری بسازید که بتواند حالت $|W_3\rangle$ را تولید کند. سپس مداری بسازید که بتواند حالت $|W_4\rangle$ را تولید کند.

■ تمرین: حالت زیر را در نظر بگیرید:

$$|\psi\rangle = \cos\theta\cos\phi|00\rangle + \cos\theta\sin\phi|01\rangle + \sin\theta|11\rangle. \tag{۱۴}$$

یک مدار کوانتومی بسازید که حالت بالا را از ورودی $|00\rangle$ تولید کند.

۴ یک مجموعه عملگرهای یونیورسال یا عام

دراین بخش می خواهیم نشان دهیم که اگر بتوانیم عملگرهای دلخواه تک کیوبیتی و $CNOT$ رابسازیم آنگاه می توانیم هرعملگر چند کیوبیتی متعلق به $U(N)$ را بسازیم. دقت کنید که برای n کیوبیت بعد فضای هیلبرت برابر با $N = 2^n$ است در نتیجه عملگرهای n بیتی متعلق به $U(N) = U(2^n)$ هستند. دراین نحوه ساخت فرض کرده‌ایم که هرعملگر تک کیوبیتی را می توانیم بسازیم. این البته فرض دور از ذهنی نیست، زیرا مثلاً اگر کیوبیت را اسپین یک هسته در نظر بگیریم می توانیم با تاباندن امواج با فرکانس رادیویی به طرزمناسب و عمل میدان مغناطیسی آنها روی اسپین هر نوع دورانی را روی اسپین انجام دهیم. اگر تنها یک مجموعه گسسته از عملگرهای یک کیوبیتی در اختیار داشته باشیم، آنگاه می توانیم با هر دقت دلخواهی عملگرهای تک کیوبیتی را بسازیم. استدلال ما از اینجا شروع می شود که نشان می دهیم هر عملگر یکانی n بیتی را

می توانیم به حاصلضربی از عملگرهای ساده تر تجزیه کنیم. نخست احتیاج به یک تعریف داریم.

تعریف: فرض کنید که $\tilde{U}$ یک عملگر یکانی متعلق به $U(n)$ باشد که فقط یک زیر ماتریسِ 2×2 آن غیر بدیهی باشد، به این معنا که این عملگر فقط روی یک زیر فضای دوبعدی به صورت عملگرِ U عمل می کند و روی هر بردار دیگری خارج از این زیر فضا مثل عملگر واحد عمل می کند. دراین صورت این عملگر یک عملگر دو ترازی $Two\ Level\ Unitary\ perator$ خوانده می شود.

مثال: فرض کنید که $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. دراین صورت ماتریس های زیر همگی عملگرهای دو ترازی متعلق به $U(4)$ هستند:

$$\tilde{U}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}. \tag{۱۵}$$

$$\tilde{U}_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{۱۶}$$

$$\tilde{U}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}. \tag{۱۷}$$

قضیه: هر عملگر یکانی $U \in U(n)$ را می توان به صورت حاصل ضرب عملگرهای یکانی دو ترازی نوشت.

اثبات: ایده کلی اثبات این است که یک ماتریس یکانی دلخواه را همواره می توان با ضرب کردن ماتریس های یکانی و دو ترازی مناسب از سمت چپ به شکل ماتریس واحد درآورد. این کار درواقع چیزی نیست جز فرایند تقلیل گاووس ـ جردان، با این تفاوت که این بار با ضرب ماتریس های یکانی انجام می شود. اگر این ماتریس هارا U_1، U_2 ، U_3 و $\cdots$ بنامیم آنگاه معنای سخن بالا آن است که

$$U_K U_{K-1} \cdots U_2 U_1 U = I, \tag{۱۸}$$

که نتیجه اش این است که

$$U = U_1^{-1} U_2^{-1} \cdots U_K^{-1}. \tag{۱۹}$$

این ایده را با یک مثال ساده توضیح می دهیم. ماتریس یکانی U را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$U = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}. \tag{۲۰}$$

ماتریس U_1 می بایست طوری انتخاب شود که عنصرِ d را در این ماتریس صفر کند. بنابراین قرار می دهیم

$$U_1 = \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ z & w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{۲۱}$$

که درآن $za + dw = 0$ و یا $z = -\kappa d$ و $w = \kappa a$. برای آنکه U_1 یکانی شود، x و y را به نحو مناسب انتخاب می کنیم و قرار می دهیم:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \kappa a^* & \kappa d^* & 0 \\ -\kappa d & \kappa a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{۲۲}$$

که درآن $\kappa := \frac{1}{\sqrt{|a|^2+|d|^2}}$. حال مطمئن هستیم که $U_1 U$ شکل زیر را دارد:

$$U_1 U = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & e' & f' \\ g' & h' & k' \end{pmatrix}. \tag{۲۳}$$

به همین نحو می توان ماتریسی مثل U_2 یافت که شرط زیر حاصل شود. (به طور نمادین همه درایه های جدید را با علامت $'$ نشان می دهیم.)

$$U_2U_1U = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & e' & f' \\ 0 & h' & k' \end{pmatrix}. \qquad (۲۴)$$

یکانی بودن U الزام می کند که a' یک فاز خالص باشد و در نتیجه $b' = c' = 0$. این فاز خالص را می توان با ضرب یک ماتریس که تنها درایه 11 آن غیر صفر است از بین برد. بنابراین

$$U_3U_2U_1U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e' & f' \\ 0 & h' & k' \end{pmatrix}. \qquad (۲۵)$$

اما ماتریس طرف راست چیزی نیست جز یک ماتریس یکانی دو ترازی و درنتیجه با ضرب طرفین این رابطه در $U_1^{-1}U_2^{-1}U_3^{-1}$ ، U به صورت حاصلضربی از ماتریس های یکانی دو ترازی در می آید. برای ماتریس های بزرگ تر این کار را می توان در صورت لزوم ادامه داد.

در مرحله بعدی نشان می دهیم که هر عملگر دو ترازی را می توان از عملگرهای کنترلی ساخت. ساده ترین عملگر کنترلی عملگر $CNOT$ است که به صورت زیر عمل می کند:

$$CNOT|x,y\rangle = |x, x\oplus y\rangle. \qquad (۲۶)$$

بنابراین هرگاه مقدار x برابر با صفر باشد، عملگر $CNOT$ روی کیوبیت دوم مثل عملگر واحد عمل می کند و هرگاه مقدار $x=1$ باشد روی کیوبیت دوم مثل X عمل می کند. به همین دلیل کیوبیت اول رابیت کنترل و بیت دوم را بیت هدف می نامیم. عملگرهای کنترلی دلخواه به صورت زیر تعریف می شوند.

تعریف: فرض کنید که U یک عملگر یکانی تک کیوبیتی باشد، دراین صورت عملگرِ کنترلی $\Lambda^1(U)$ به شکل زیر تعریف می شود:

$$\Lambda^1(U)|x,y\rangle = |x\rangle\otimes U^x|y\rangle \qquad (۲۷)$$

به عبارت دیگر عملگر U روی کیوبیت دوم تنها وقتی اثر می کند که مقدارِ x برابر با 1 باشد، درغیر این صورت روی کیوبیت دوم عملگر واحد عمل می کند. به این معناست که مقدار بیت x عملی را که قرار است روی کیوبیت دوم انجام شود تعیین می کند و $\Lambda^1(U)$ یک عملگر

کنترلی خوانده می شود.

مثال ۱ : هرگاه $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ یک عملگرِ یکانی یک بیتی باشد، ماتریس های $\Lambda^1(U)$ و $\Lambda^2(U)$ چنین شکلی دارند:

$$\Lambda^1(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}. \tag{۲۸}$$

$$\Lambda^2(U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}. \tag{۲۹}$$

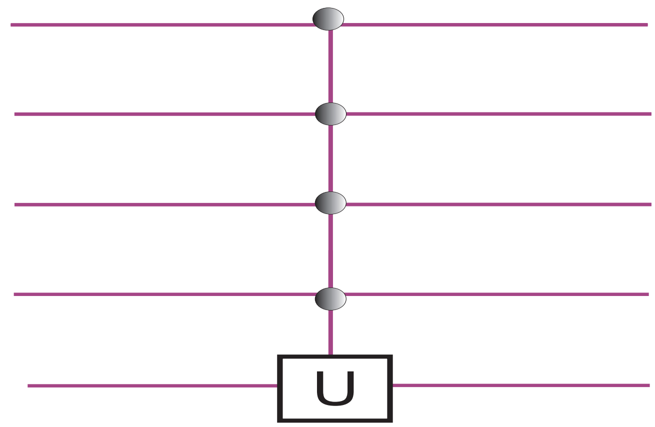
به همین ترتیب می توانیم عملگرهایی را تعریف کنیم که عمل آنها روی بیت $n+1$ ام توسط n بیت اول تعیین شود:

$$\Lambda^n(U)|x_1, x_2, \cdots x_n, y\rangle = |x_1, x_2, \cdots x_n\rangle \otimes U^{x_1 x_2 \cdots x_n}|y\rangle. \tag{۳۰}$$

شکل 4 یک عملگرِ $\Lambda^4(U)$ را نشان می دهد.

مثال ۲: عملگر $CNOT = \Lambda^1(\sigma_x)$ یکی از مهم ترین عملگرهای کنترلی است. این عملگر به شکل زیر عمل می کند

$$\Lambda^1(\sigma_x)|x, y\rangle = |x, x \oplus y\rangle, \tag{۳۱}$$



شکل ۱: یک عملگر کنترلی $\Lambda^4(U)$.

و شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$CNOT = \Lambda^1(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (۳۲)$$

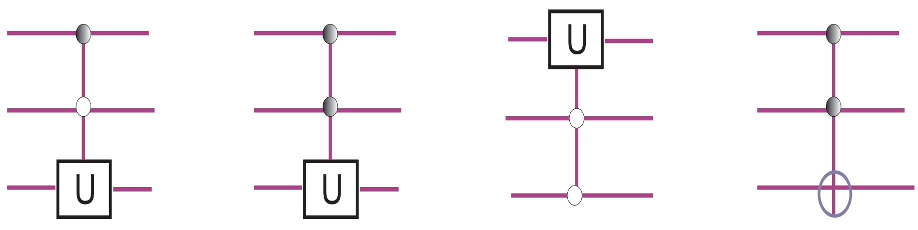
هم چنین داریم

$$\Lambda^2(\sigma_x)|x, y, z\rangle = |x, y, xy \oplus z\rangle. \qquad (۳۳)$$

یک نکته مهم : همه‌ی عملگرهای $\Lambda^n(\sigma_x)$ را بدلیل کاربرد وسیع آنها عملگرِ $CNOT$ می نامیم. این عملگرها و دیگر عملگرهای کنترلی به شکل استاندارد به گونه ای تعریف شده اند که بیت آخر آنها بیت هدف و $n-1$ بیت اول آنها بیت های کنترل باشند. هم چنین این عملگرها تنها وقتی عمل می کنند که بیت های اول همگی برابر با صفر باشند. روشن است که انواع متفاوتی از عملگرهای کنترلی می توان تصور کرد که بیت های کنترلی آنها با هم متفاوت باشند. هم چنین الزامی ندارد که این عمل گر ها حتماً وقتی که بیت های کنترل برابر با صفر هستند، عمل کنند. برای اینکه تفاوت این عملگرها را در مدارها نشان دهیم روی بیت های کنترل یک دایره قرار می دهیم. دایره توپر به معنای این است که آن بیت می بایست مساوی ۱ باشد تا عملگر کار کند و دایره توخالی به معنای این است که آن بیت می بایست مساوی 0 باشد تا عملگر کار کند. شکل زیر چند نوع از عملگر های کنترلی را نشان می دهد. در شکل زیر عملگرهای نشان داده شده از چپ به راست به ترتیب زیر عمل می

کنند:

$$|x,y,z\rangle \longrightarrow |x,y,U^{x\overline{y}}|z\rangle, \quad |x,y,z\rangle \longrightarrow |x,y,U^{xy}|z\rangle, \quad |x,y,z\rangle \longrightarrow U^{\overline{yz}}|x\rangle|y,z\rangle, \quad |x,y,z\rangle \longrightarrow |x,y,xy\oplus z\rangle.$$



شکل ۲: عملگرهای کنترلی که بیت کنترل آنها و نحوه عمل کردن آنها با هم متفاوت است.

قضیه: هر عملگر دو ترازی مثل $\tilde{U}$ روی n کیوبیت را می توان از عملگرهای کنترلی $CNOT$ و عملگرِ $\Lambda^{n-1}(U)$ ساخت.

اثبات روش ساخت را نشان می دهیم که با استفاده از آن خواننده می تواند ایده اصلی اثبات را دریابد. فرض کنید که عملگر $\tilde{U}$ روی زیرفضایی که با بردارهای $|g_0\rangle, |g_m\rangle$ جاروب می شود به طور غیر بدیهی عمل می کند. یک کد گری می نویسیم که رشته‌ی g_0 را به رشته g_m ربط دهد. بردارهای متناظر با این رشته را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$|g_0\rangle, \quad |g_2\rangle \quad |g_3\rangle \quad \cdots |g_m\rangle. \tag{۳۴}$$

به عنوان مثال اگر $|g_0\rangle = |00\rangle$ و $|g_2\rangle = |11\rangle$ می نویسیم

$$|g_0\rangle = |00\rangle, \quad |g_1\rangle = |01\rangle, \quad |g_2\rangle = |11\rangle, \tag{۳۵}$$

یا اگر $|g_0\rangle = |000\rangle$ و $|g_3\rangle = |111\rangle$ می نویسیم

$$|g_0\rangle = |000\rangle, \quad |g_1\rangle = |001\rangle, \quad |g_2\rangle = |011\rangle, \quad |g_3\rangle = |111\rangle. \tag{۳۶}$$

حال رشته ای از عملگرهای تعمیم یافته‌ی $CNOT$ در نظر می گیریم که حالتِ $|g_0\rangle$ را به $|g_1\rangle$، حالتِ $|g_1\rangle$ را به $|g_2\rangle$ و بالاخره حالتِ $|g_{m-1}\rangle$ را به حالتِ $|g_m\rangle$ تبدیل کنند. این عملگرها را به ترتیب با C_0، C_1 تا C_{m-1} نشان می دهیم. اثرِ این رشته عملگر روی حالتِ $|g_0\rangle$ حالتِ $|g_{m-1}\rangle$ را تولید می کنند. سپس یک عملگرِ کنترلی $\Lambda^{n-1}(U)$ اعمال می کنیم که بیت های کنترلی اش همه بیت های مشترک بینِ $|g_{m-1}\rangle$

و $|g_m\rangle$ باشد. پس از آن عملگرهای C_0، C_1 تا C_{m-1} را به ترتیب معکوس اعمال می کنیم. به عبارت دیگر عملگرزیر را می سازیم

$$\tilde{U} := C_0 \cdots C_{m-2} C_{m-1} \Lambda^{n-1}(U) C_{m-1} C_{m-2} \cdots C_0 \qquad (۳۷)$$

این عملگر تنها روی زیر فضای ساخته شده از $|g_0\rangle$ و $|g_m\rangle$ به طور غیر بدیهی عمل می کند.

مثال ۳ فرض کنید که

$$\tilde{U} := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad (۳۸)$$

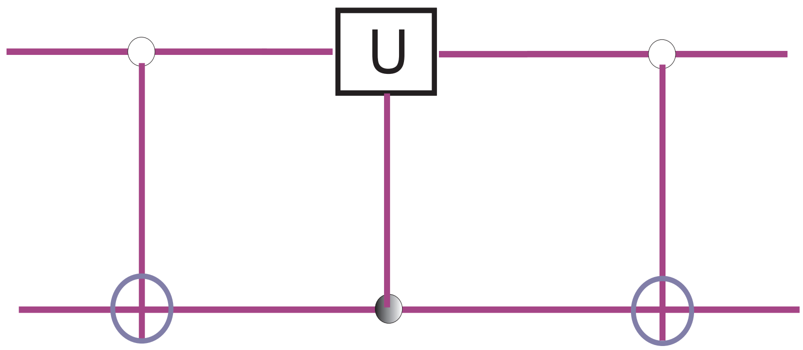
این عملگر روی زیر فضای $|00\rangle = |g_0\rangle$ و $|11\rangle =: |g_2\rangle$ به صورت غیر بدیهی عمل می کند. در مثال ۱ یک کد گری برای این دو حالت نوشته شده است. عملگر C_0 می بایست حالت $|00\rangle = |g_0\rangle$ را به حالت $|01\rangle = |g_1\rangle$ تبدیل کند. بنابراین C_0 یک عملگرِ $CNOT$ است که بیت اول اش کنترلی و بیت دوم اش هدف است و وقتی عمل می کند که بیت کنترلی اش برابر با صفر باشد. عملگر $\Lambda^1(U)$ نیز بیت دوم اش کنترلی است و وقتی عمل می کند که این بیت برابر با ۱ باشد. بنابراین داریم

$$\tilde{U} = C_0 \Lambda^1(U) C_0. \qquad (۳۹)$$

مداری که این عملگر را پیاده‌سازی می کند در شکلِ 4 نشان داده شده است. با دنبال کردن این مدار از چپ به راست خواننده می تواند تحقیق کند که این عملگر تنها حالت های $|00\rangle$ و $|11\rangle$ را به هم تبدیل می کند: درواقع داریم

$$\begin{aligned} |00\rangle &\longrightarrow |01\rangle \longrightarrow a|01\rangle + c|11\rangle \longrightarrow a|00\rangle + c|11\rangle \\ |01\rangle &\longrightarrow |00\rangle \longrightarrow |00\rangle \longrightarrow |01\rangle \\ |10\rangle &\longrightarrow |10\rangle \longrightarrow |10\rangle \longrightarrow |10\rangle \\ |11\rangle &\longrightarrow |11\rangle \longrightarrow b|01\rangle + d|11\rangle \longrightarrow b|00\rangle + d|11\rangle. \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

تا کنون نشان داده ایم که تمام عملگرهای n کیوبیتی را می توانیم از ترکیب عملگرهای کنترلی n بیتی ساخت. درتجزیه‌ای که از عملگرهای دلخواه در پیش داریم، قضیه زیر ما را یک قدم جلوتر می برد.



شکل ۳: نحوه ساختن عملگرهای دوترازی با استفاده از عملگر های کنترلی. مثال ۳.

قضیه: تمام عملگرهای کنترلی n بیتی را می توان از عملگرهای کنترلی یک بیتی ساخت.

اثبات: برای سادگی نخست نشان می دهیم که تمام عملگرهای کنترلی دو بیتی را می توان از عملگرهای کنترلی یک بیتی ساخت. فرض کنید می خواهیم عملگر $\Lambda^2(U)$ را بسازیم. می دانیم که عملگرِ U یکانی است و بنابراین جذر آن وجود دارد. قرار می دهیم $V := U^{\frac{1}{2}}$. حال از این رابطه استفاده می کنیم که

$$x \oplus y = x + y - 2xy \qquad (۴۱)$$

و آن را به صورت زیر می نویسم

$$2xy = x + y - x \oplus y. \qquad (۴۲)$$

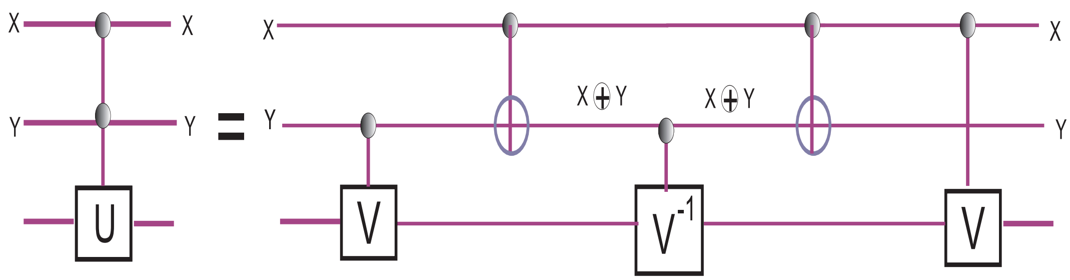
در نتیجه می نویسیم

$$U^{xy} = V^{2xy} = V^{x+y-x\oplus y} = V^x V^{-1^{x\oplus y}} V^y \qquad (۴۳)$$

می دانیم که بیت $x \oplus y$ خود توسط یک عملگر کنترلی یک بیتی ایجاد می شود. بنابراین رابطه فوق نشان می دهد که عملگر کنترلی دو بیتی $\Lambda^2(U)$ به صورت حاصلضربی از عملگرهای کنترلی یک بیتی ساخته شده است. مدارِ شکل 4 چگونگی ترکیب این عملگرها را نشان می دهد.

این روش به همین ترتیب به عملگرهای کنترلی چند بیتی نیز تعمیم داده می شود. نکته مهم در اثبات تمام این قضیه اتحاد های زیراست:

$$2xy \quad = \quad x + y - x \oplus y$$



شکل ۴: چگونگی ساخت یک عملگر کنترلی دو بیتی از عملگرهای کنترلی یک بیتی .

$$\begin{aligned} 4xyz &= x+y+z-(x\oplus y)-(y\oplus z)-(x\oplus z)+x\oplus y\oplus z\\ \cdots &= \cdots \\ 2^{n-1}x_1x_2\cdots x_n &= \sum_i x_i-\sum_{i<j}x_i\oplus x_j+\sum_{i<j<k}x_i\oplus x_j\oplus x_k\cdots\cdots\ \pm x_1\oplus x_2\oplus\cdots x_n. \end{aligned}$$ (۴۴)

به عنوان مثال برای ساختن یک عملگر کنترلی ۳ کیوبیتی از اتحاد دوم استفاده می کنیم و می نویسیم

$$U^{xyz}=V^{4xyz}=V^{x+y+z-(x\oplus y)-(y\oplus z)-(x\oplus z)+x\oplus y\oplus z}$$ (۴۵)

که درآن $U = V^4$. درنتیجه در طرف راست تنها عملگرهای کنترلی ای داریم که یک بیت کنترل کننده‌ی آنهاست. این بیت البته ممکن است به صورت یک بیت از نوع $x\oplus y$ باشد ولی می دانیم که چگونه با استفاده از عملگرهای $CNOT$ که خود یک عملگر کنترلی یک بیتی است چنین بیت هایی را ایجاد کنیم. برای آنکه به تعداد کمتری از عملگرهای $CNOT$ استفاده کنیم می بایست طرف راست تساوی 45 طوری بسط دهیم که توان هر عملگر با عملگر قبلی اش تنها در یک بیت اختلاف داشته باشد. یعنی باید بنویسیم

$$U^{xyz}=V^xV^{-1^{x\oplus y}}V^yV^{-1^{y\oplus z}}V^{x\oplus y\oplus z}V^{-1^{x\oplus z}}V^z$$ (۴۶)

این نحوه مرتب کردن به معنای آن است که ما در نوشتن ترتیبِ جملات طرف راست در تساوی 45 از کدِ گری $Gray\ Code$ استفاده می کنیم، که یک نمونه از آن در جدول 4 نشان داده شده است.

سوالی که با آن مواجه هستیم آن است که چگونه عملگرهای کنترلی یک بیتی را بسازیم. در زیر نشان می دهیم که تنها کافی است یک عملگر

	x	y	z
	0	0	0
x	1	0	0
$x \oplus y$	1	1	0
y	0	1	0
$y \oplus z$	0	1	1
$x \oplus y \oplus z$	1	1	1
$x \oplus z$	1	0	1
z	0	0	1

جدول ۱: کد گری برای سه متغیر

کنترلی یک بیتی یعنی $CNOT$ را بسازیم، زیرا به کمک آن می توانیم تمام عملگرهای کنترلی یک بیتی دیگر را بسازیم. دقت کنید که در آزمایشگاه ساختن یک عملگر مثل $CNOT$ بخودی خود دشواراست، زیرا عمل این عملگر بستگی به مقدار کیوبیت هدف آن دارد و این کار را بدون اینکه هیچ نوع اندازه گیری روی کیوبیت اول انجام دهد می بایست انجام دهد. گزارش هایی که از گروه های تجربی در مورد ساختن عملگرِ $CNOT$ و عملگرهای نزدیک به آن منتشر شده است ، جزء پیشرفت های مهم تجربی در زمینه ساخت کامپیوترهای کوانتومی محسوب می شود. این موضوع نشان می دهد که اولاً ساختن عملگرهای کنترلی از نظر تجربی تا چه اندازه دشوار است ، ثانیاً ساختن عملگر $CNOT$ تا چه اندازه اهمیت دارد. دلیل این اهمیت این است که همه عملگرهای کنترلی تک کیوبیتی را می توان با ترکیب عملگرِ $CNOT$ و عملگرهای یک کیوبیتی معمولی ساخت. برای اثبات این قضیه احتیاج به یک لم داریم. می دانیم که هر عملگر تک کیوبیتی ماتریسی است متعلق به گروه $U(2)$ که می توان آن را به صورت $e^{i\phi}W$ نوشت که در آن W یک ماتریس متعلق به گروه $SU(2)$ است، یعنی دترمینان اش برابر با یک است و بنابراین نشان دهنده یک دوران است. فعلا توجه خود را به همین ماتریس معطوف می کنیم و یک لم را ثابت می کنیم.

لم: برای هر ماتریس یکانی $W \in SU(2)$ می توان ماتریس های یکانی A، B و C را چنان یافت که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} ABC &= I \\ A\sigma_x B\sigma_x C &= W. \end{aligned} \qquad (۴۷)$$

اثبات: می دانیم که عملگر W را می توان به شکل زیر نوشت:

$$W = R_z(\alpha)R_y(\theta)R_z(\beta). \tag{۴۸}$$

با توجه به شرایط یاد شده می خواهیم W را به شکل زیر بنویسیم

$$W = A\sigma_x B\sigma_x B^{-1}A^{-1}. \tag{۴۹}$$

ضرایب α و β را به شکل زیر بازتعریف می کنیم:

$$\alpha = \frac{\gamma+\delta}{2} \qquad \beta = \frac{\gamma-\delta}{2} \tag{۵۰}$$

بنابراین W برابر خواهد بود با:

$$R_z(\frac{\gamma+\delta}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{\gamma-\delta}{2}). \tag{۵۱}$$

مقایسه 49 و 51 نشان می دهد که عملگر A را می بایست به شکل زیر در نظرگرفت:

$$A = R_z(\frac{\delta}{2}) \tag{۵۲}$$

و در نتیجه

$$R_z(\frac{\gamma}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{\gamma}{2}) = \sigma_x B\sigma_x B^{-1}. \tag{۵۳}$$

ماتریسِ B را به شکل زیر می نویسم:

$$B = R_z(\xi)R_y(\theta_1). \tag{۵۴}$$

جایگذاری این رابطه در رابطه بالا منجر می شود به:

$$\begin{aligned} &R_z(\frac{\gamma}{2})R_y(\theta)R_z(\frac{\gamma}{2}) = \sigma_x B\sigma_x B^{-1} \\ &= \sigma_x R_z(\xi)R_y(\theta_1)\sigma_x R_y(-\theta_1)R_z(-\xi) \end{aligned}$$

$$= R_z(-\xi)R_y(-2\theta_1)R_z(-\xi). \qquad (۵۵)$$

مقایسه دو طرف این رابطه نشان می دهد که

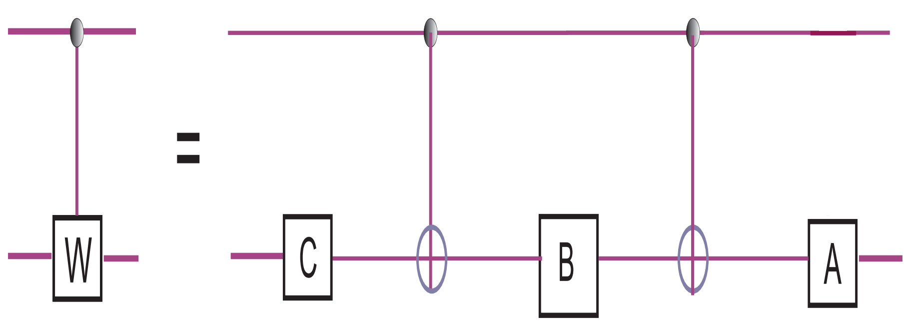
$$\xi = -\frac{\gamma}{2}, \qquad \theta = -2\theta_1. \qquad (۵۶)$$

بنابراین بدست می آوریم:

$$A = R_z(\frac{\alpha-\beta}{2}) \qquad B = R_z(\frac{-\alpha-\beta}{2})R_y(-\frac{\theta}{2}), \qquad C = R_y(\frac{\theta}{2})R_z(\beta). \qquad (۵۷)$$

می توان دراین جا تحقیق کرد که روابطِ 47 برقرار هستند.

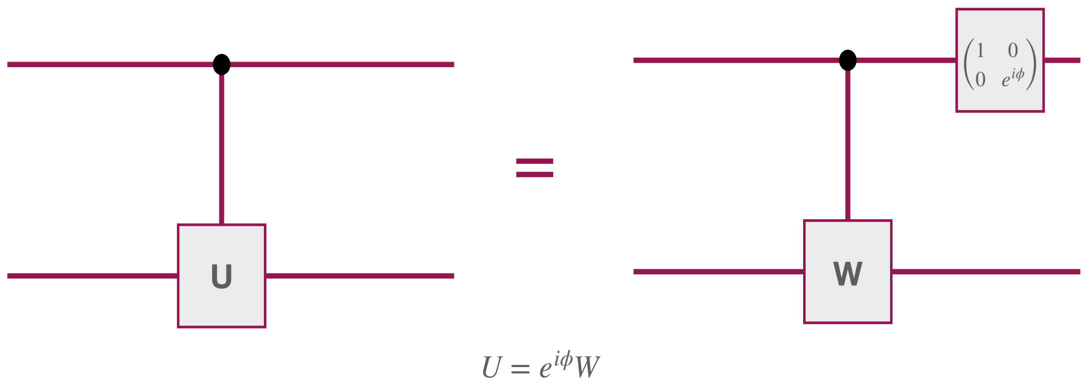
نتیجه هر عملگر یکانی $U \in U(2)$ را می توان به شکلِ $U = e^{i\phi}A\sigma_x B\sigma_x C$ نوشت که در آن A، B و C عملگرهای یکانی هستند که در شرط $ABC = I$ صدق می کنند.



چگونگی ساخت عملگرهای کنترلی یک بیتی با استفاده از عملگر CNOT و عملگرهای یک بیتی معمولی . ترتیب عمل کردن عملگر ها از چپ به راست است.

لم ای که ثابت کردیم و شکل بالا نشان می دهد که چگونه می بایست عملگرهای یک کیوبیتی را با $CNOT$ ترکیب کرد تا بتوان هر عملگر

کنترلی یک کیوبیتی $\Lambda^1(W \in SU(2))$ را ساخت. با اضافه کردن یک گیت ساده می توانیم هر عملگر کنترلی یک کیوبیتی $\Lambda^1(U \in SU(2))$ را بسازیم. مدار نشان داده شده در شکل (۴) نشان می دهد که چگونه این کار انجام می شود.



شکل ۶: چگونگی ساختن یک گیت کنترلی $\Lambda^1(U \in U(2))$ از یک گیت کنترلی $\Lambda^1(W \in SU(2))$.

بنابراین نشان داده ایم که هرگاه عملگرهای یک کیوبیتی دلخواه و هم چنین عملگرِ $CNOT$ را بسازیم با ترکیب آنها می توانیم هر عملگردلخواه متعلق به $U(N = 2^n)$ را بسازیم. اما می توان از این هم فراتر رفت و نشان داد که می توان تنها با استفاده از دو نوع خاص از عملگرهای یک کیوبیتی به هدف بالا نائل شد. البته دراین صورت چون از یک مجموعه عملگرهای گسسته استفاده می کنیم ساخت عملگرهای دلخواه به صورت تقریبی ممکن خواهد بود. اما می توان با افزایش تعداد عملگرها به هر دقتی که می خواهیم برسیم.

۵ ساخت عملگرهای یک بیتی

دراین قسمت نشان می دهیم که تنها با داشتن دو عملگر یعنی عملگر هادامارد H و عملگرِ $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix}$ می توان به حد دلخواه به هر عملگر یکانی تک کیوبیتی نزدیک شد. برای این کار نخست به یک قضیه کوچک و ساده احتیاج داریم.

قضیه: تجزیه ZYZ از یک عملگر یکانی یک بیتی فرض کنید که U یک عملگریکانی دلخواهِ تک کیوبیتی است. دراین صورت اعداد حقیقیِ α، β ، γ و δ وجود دارند به قسمی که:

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta). \tag{۵۸}$$

اثبات: چون U یکانی است می توان نوشت $U = e^{i\alpha} V$ که درآن $V \in SU(2)$. اما ماتریس های $SU(2)$ یک شکل استاندارد دارند به این معنا که

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \tag{۵۹}$$

که درآن $|a|^2 + |b|^2 = 1$. بنابراین

$$a = e^{i\theta} \cos \frac{\gamma}{2}, \qquad b := e^{i\phi} \sin \frac{\gamma}{2}. \tag{۶۰}$$

و درنتیجه

$$V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \cos \frac{\gamma}{2} & e^{i\phi} \sin \frac{\gamma}{2} \\ -e^{-i\phi} \sin \frac{\gamma}{2} & e^{-i\theta} \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \tag{۶۱}$$

از طرفی می دانیم که

$$V = R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\beta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\beta}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\gamma}{2} & \sin \frac{\gamma}{2} \\ -\sin \frac{\gamma}{2} & \cos \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\delta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{-\delta}{2}} \end{pmatrix} \tag{۶۲}$$

مقایسه این رابطه با رابطه قبلی نشان می دهد که

$$\theta = \frac{\beta + \delta}{2}, \qquad \phi = \frac{\beta - \delta}{2}. \tag{۶۳}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

نتیجه: تجزیه ZXZ از یک عملگر یکانی یک بیتی تجزیه فوق تنها تجزیه ممکن از یک عملگر یک بیتی نیست. می توان یک عملگر یکانی را به صورت های مختلف به دوران های حول محورهای سه گانه تجزیه کرد. به عنوان مثال رابطه 58 موسوم به تجزیه ZYZ را در نظر بگیرید. می دانیم که عملگردوران $R_z(\frac{-\pi}{2})$ محور x را به محور y تبدیل می کند. به عبارت دیگر

$$R_z(\frac{-\pi}{2})(x\cdot\sigma)R_z(\frac{\pi}{2}) = (y\cdot\sigma), \tag{۶۴}$$

که از آن نتیجه می گیریم

$$R_z(\frac{-\pi}{2})R_x(\gamma)R_z(\frac{\pi}{2}) = R_y(\gamma). \tag{۶۵}$$

در نتیجه با استفاده از 58، تجزیه ZXZ را بدست می آوریم

$$U = e^{i\alpha}R_z(\beta-\frac{\pi}{2})R_x(\gamma)R_z(\delta+\frac{\pi}{2}). \tag{۶۶}$$

دقت کنید که عملگر هادامارد خاصیت های جالب زیر را دارد:

$$H^2 = I, \qquad HXH = Z, \qquad HZH = X, \qquad HYH = -Y. \tag{۶۷}$$

حال دو عملگرِ T و HTH را در نظر می گیریم. حاصلضرب این دو عملگر منهای یک فاز کلی برابراست با:

$$\begin{aligned} T(HTH) &\equiv R_z(-\pi/4)R_x(-\pi/4) = (\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}Z)(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}Y) \\ &= \cos^2\frac{\pi}{8} - i\left[\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}X + \sin^2\frac{\pi}{8}Y + \cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}Z\right] \end{aligned} \tag{۶۸}$$

این عملگر بازهم یک عملگر دوران است که می توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$Q := THTH = R_{\mathbf{n}}(\phi), \tag{۶۹}$$

که درآن $\mathbf{n}$ بردار یکه ای است درامتدادِ بردارِ زیر:

$$\mathbf{n} = (\cos\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{8}) \tag{۷۰}$$

و زاویه دورانِ θ از رابطه زیر بدست می آید:

$$\cos\phi = \cos^2\frac{\pi}{8}. \tag{۷۱}$$

می توان نشان داد که $\frac{\phi}{2\pi}$ یک عدد گنگ است. در نتیجه عملگر های $Q^m = R_{\mathbf{n}}(\mu\phi)$ که در آن m یک عدد صحیح است مجموعه تمام دوران های حو ل محور $\mathbf{n}$ را پوشش می دهند. اصطلاحاً گفته می شود که توان های این عملگر در مجموعه تمام دوران های حول محور $\mathbf{n}$ یک زیر مجموعه چگال تشکیل می دهند. اما هنوز این عملگرها در مجموعه تمام دوران ها چگال نیستند، زیرا محور آنها ثابت است. برای پوشش دادن تمام عملگرها احتیاج داریم که محور های جدید درست کنیم. برای این کار عملگر زیر را درست می کنیم.

حال اگر دوباره عملگر هادامارد را روی این عملگر اثر دهیم بدست می آوریم

$$S := HQH = R_{\mathbf{m}}(\theta), \tag{۷۲}$$

که درآن $\mathbf{m} = (\cos\frac{\pi}{8}, -\sin\frac{\pi}{8}, \cos\frac{\pi}{8})$. بردارهای $\mathbf{m}$ و $\mathbf{n}$ دو بردار غیر متعامد هستند و می توان نشان داد که با دوران های متناوب حول آنها هر دورانِ دلخواه بدست می آید. کامل کردن این قضیه را به عنوان تمرین به عهده خواننده می گذاریم.

بحث ما در مورد نحوه ساختن عملگرهای دلخواه از یک مجموعه یونیورسال دراین جا به پایان می رسد. این درس را می بایست با یک سوال مهم و پاسخ آن به انتها ببریم. سوال این است که اگر بخواهیم یک عملگریکانی تک کیوبیتی را با دقت ϵ بسازیم و تنها یک مجموعه ثابت (مثل دو عملگر $Q,\ S$) در اختیار داشته باشیم، کوچکتر کردن ϵ به چه صورت تعداد گیت های مورد استفاده (یعنی تعداد گیت های Q,S را در مثال فوق) افزایش می دهد. اگر این تعداد به صورت نمایی زیاد شود معنایش این است که ساختن دقیق عملگرها کاری است عملاً غیر ممکن. قضیه $Kitaev - Solovay$ که آن را بدون اثبات ذکر می کنیم، پاسخی بسیار امیدوار کننده به این سوال است.

قضیه سولوی ـ کیتائف: [۱]

هرگاه از یک مجموعه ثابت از گیت های یک کیوبیتی بخواهیم یک عملگر یکانی یک کیوبیتی را با دقتِ ϵ بسازیم، تعداد گیت های مورد نیاز به صورت $O([\log(\frac{1}{\epsilon})]^c)$ افزایش می یابد که در آن c عددی نزدیک به ۲ است و O نشان دهنده مرتبه است.

---

[۱] **Solovay-Kitaev**

- **یک نکته:** آنچه که در این درس در مورد ساخت مدارهای کوانتومی گفتیم یک اثبات وجودی است به این معنا که علی الاصول می توان با دقت دلخواه و با استفاده از یک مجموعه گیت های عام هر مدار کوانتومی یا هر عملگریکانی بزرگی را ساخت. در عمل لازم نیست که برای ساخت یک مدار کوانتومی این راه طی شود. این که یک مجموعه گیت عام کدام ها هستند بستگی به این دارد که کامپیوتر کوانتومی خود را با استفاده از چه نوع کیوبیت هایی ساخته ایم. هم چنین برای ساخت یک مدار معین اغلب راه هایی برای بهینه سازی اجزای مدار کوانتومی طی می شود که با آنچه که در این درس گفتیم تفاوت دارد و بستگی زیادی نیز به این دارد که از چه نوع کیوبیت هایی برای ساخت کامپیوتر کوانتومی استفاده کرده ایم.

---

۶ تمرین ها

- در تمرین های زیر فرض کنید که عملگرهای دلخواه یک کیوبیتی را در اختیار دارید مگر آنکه خلاف آن صریحا گفته شده باشد .

- یک مدار کوانتومی بسازید که بتواند از یک حالت $|000\rangle$ حالت GHZ یعنی $\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$ را درست کند. خروجی های مدار را برای وقتی که ورودی آن یک حالت ضربی دلخواه به صورت

$$|i, j, k\rangle, \qquad i,\ j,\ k = 0, 1$$

باشد پیدا کنید.

- یک مدار کوانتومی بسازید که بتواند از یک حالت $|000\rangle$ حالت زیر را درست کند:

$$|\psi\rangle = \cos\theta|100\rangle + \sin\theta\cos\phi|010\rangle + \sin\theta\cos\phi|001\rangle. \tag{۷۳}$$

- یک مدار بسازید که با ورودی های مناسبی که به صورت ضربی هستند بتواند حالت های درهم تنیده زیر را درست کند:

$$|\phi^+\rangle = \cos\theta|00\rangle + \sin\theta|11\rangle, \tag{۷۴}$$

$$|\phi^-\rangle = \cos\theta|00\rangle - \sin\theta|11\rangle, \tag{۷۵}$$

$$|\psi^+\rangle = \cos\theta|01\rangle + \sin\theta|10\rangle, \tag{۷۶}$$

$$|\psi^-\rangle = \cos\theta|01\rangle - \sin\theta|10\rangle. \tag{۷۷}$$

- یک مدار کوانتومی بسازید که بتواند با ورودی های مناسبی که به صورت ضربی هستند، حالت های زیر را درست کند:

$$|\phi^0_+\rangle = \cos\theta|000\rangle + \sin\theta|111\rangle, \quad (۷۸)$$

$$|\phi^0_-\rangle = -\sin\theta|000\rangle + \cos\theta|111\rangle, \quad (۷۹)$$

$$|\phi^1_+\rangle = \cos\theta|001\rangle + \sin\theta|110\rangle, \quad (۸۰)$$

$$|\phi^1_-\rangle = -\sin\theta|001\rangle + \cos\theta|110\rangle, \quad (۸۱)$$

$$|\phi^2_+\rangle = \cos\theta|010\rangle + \sin\theta|101\rangle, \quad (۸۲)$$

$$|\phi^2_-\rangle = -\sin\theta|010\rangle + \cos\theta|101\rangle, \quad (۸۳)$$

$$|\phi^3_+\rangle = \cos\theta|011\rangle + \sin\theta|100\rangle \quad (۸۴)$$

$$|\phi^3_-\rangle = -\sin\theta|011\rangle + \cos\theta|100\rangle. \quad (۸۵)$$

- با استفاده از عملگرهای $CNOT$ و عملگرهای تک کیوبیتی عملگر $\Lambda^2(Z)$ را بسازید. سعی کنید که از کمترین تعداد عملگرهای $CNOT$ استفاده کنید.

- به همان شیوه مسئله قبلی سعی کنید عملگر $\Lambda^3(Z)$ را بسازید.

- یک عملگر دوترازی که روی دو کیوبیت اثر می کند در نظر بگیرید. این عملگر روی زیر فضای تشکیل شده از $|01\rangle$ و $|10\rangle$ به صورت U عمل می کند و روی بقیه فضا به صورت عملگر واحد عمل می کند. با استفاده از عملگرهای $CNOT$ و گیت کنترلی $\Lambda^1(U)$ را این عملگر را بسازید.

- الف: یک عملگر دوترازی که روی سه کیوبیت اثر می کند در نظر بگیرید. این عملگر روی زیر فضای تشکیل شده از $|001\rangle$ و $|100\rangle$ به صورت U عمل می کند و روی بقیه فضا به صورت عملگر واحد عمل می کند. با استفاده از عملگرهای $CNOT$ و گیت کنترلی $\Lambda^1(U)$ را این عملگر را بسازید. با دادن ورودی های مختلف به این مدار واقعا تحقیق کنید که این مدار عمل خواسته شده را انجام می دهد.

ب: قسمت الف را برای وقتی که عملگر دو ترازی روی زیرفضای تشکیل شده از $|000\rangle,\ |111\rangle$ عمل می کند حل کنید.

- یک عملگر دوترازی که روی سه کیوبیت اثر می کند در نظر بگیرید. این عملگر روی زیر فضای تشکیل شده از $|0011\rangle$ و $|1100\rangle$ به صورت U عمل می کند و روی بقیه فضا به صورت عملگر واحد عمل می کند. با استفاده از عملگرهای $CNOT$ و گیت کنترلی $\Lambda^1(U)$ را این عملگر را بسازید. با دادن ورودی های مختلف به این مدار واقعا تحقیق کنید که این مدار عمل خواسته شده را انجام می دهد.

- یک مدار کوانتومی بسازید که وقتی ورودی های

$$|i,j\rangle, \qquad i,\ j=0,1$$

را می گیرد حالت های زیر را تولید کند:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+e^{i\phi}|11\rangle)\\&\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle-e^{i\phi}|11\rangle)\\&\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle+e^{i\phi}|10\rangle)\\&\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle-e^{i\phi}|10\rangle).\end{aligned} \qquad (۸۶)$$

- یک مدار کوانتومی بسازید که روی ورودی $|0000\rangle$ اثر کند و حالت زیر را تولید کند:

$$\frac{1}{2}(|1000\rangle+|0100\rangle+|0010\rangle+|0001\rangle) \qquad (۸۷)$$

- یک مدار کوانتومی بسازید که روی ورودی $|0000\rangle$ اثر کند و حالت زیر را تولید کند:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|1110\rangle+|0111\rangle) \qquad (۸۸)$$

- یک مدار کوانتومی بسازید که روی ورودی $|0000\rangle$ اثر کند و حالت زیر را تولید کند:

$$\cos\theta|1100\rangle+\sin\theta|0011\rangle \qquad (۸۹)$$

- الف: یک مدار کوانتومی بسازید که وقتی دو کیوبیت اول و دوم با هم مخالف هستند روی کیوبیت سوم عمل U را انجام دهد و در غیر این صورت روی کیوبیت سوم عمل همانی را انجام دهد.

ب: قسمت الف را تغییر دهید طوری که وقتی دو کیوبیت اول باهم مساوی هستند عمل U روی کیوبیت سوم اثر کند و در غیر این صورت عمل همانی روی کیوبیت سوم اثر کند.

- الف: یک مدار کوانتومی بسازید که وقتی دو کیوبیت اول و دوم با هم مخالف هستند روی کیوبیت سوم عمل U را انجام دهد و در غیر این صورت روی کیوبیت سوم عمل همانی را انجام دهد.

ب: قسمت الف را تغییر دهید طوری که وقتی دو کیوبیت اول باهم مساوی هستند عمل U روی کیوبیت سوم اثر کند و در غیر این صورت عمل همانی روی کیوبیت سوم اثر کند.

- یک مدار کوانتومی بسازید که وقتی سه کیوبیت اول در یکی از حالت های

$$\{100,\ 010,\ 001,\ 111\}$$

باشد روی کیوبیت چهارم عملگر U را اثر دهد و در غیر این صورت عملگر همانی را اثر دهد.

- یک مدار کوانتومی بسازید که وقتی سه کیوبیت اول در یکی از حالت های

$$\{100,\ 010,\ 001\}$$

باشد روی کیوبیت چهارم عملگر U را اثر دهد و در غیر این صورت عملگر همانی را اثر دهد.

■ یک مدار کوانتومی بسازید که حالت $|0000\rangle$ را به حالت زیر تبدیل کند:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0001\rangle + |0010\rangle + |0100\rangle + |1000\rangle). \qquad (۹۰)$$

راهنمایی: یک راه این است که از حالت

$$|\psi_+\rangle \otimes |\psi_+\rangle \qquad (۹۱)$$

شروع کنید که در آن $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |01\rangle)$ است و سپس 1 های اضافه را با عملگرهای کنترلی مناسب به 0 تبدیل کنید. اگر این راه را انتخاب کنید، می بایست یک مدار اولیه نیز بسازید که حالت اولیه (۹۱) را بسازد. البته شاید شما بتوانید راه ساده تر و مبتکرانه ای ارائه دهید.

■ می خواهیم دو کیوبیت را در پایه بل اندازه گیری کنیم. نشان دهید که می توانیم نخست با اعمال گیت های کوانتومی و سپس با اندازه گیری تنها یک کیوبیت این اندازه گیری را انجام دهیم.

■ عملگر زیر را در نظر بگیرید:

$$U := \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & -d^* & c^* & 0 \\ -b^* & 0 & 0 & a^* \end{pmatrix}, \qquad (۹۲)$$

که در آن $|a|^2 + |b|^2 = 1$ و $|c|^2 + |d|^2 = 1$. یک مدار کوانتومی با استفاده از گیت های کوانتومی یک کیوبیتی و $CNOT$ بسازید که عملگر فوق را ایجاد کند.

■ تمرین: الف: یک مدار کوانتومی بسازد که عملگر یکانی زیر را روی دو کیوبیت اثر دهد:

$$U_z(\gamma) := e^{i\gamma(\sigma_z\otimes\sigma_z)} \qquad (۹۳)$$

ب: از این نکته استفاده کنید که $H\ \sigma_z\ H = \sigma_x$ و مداری بسازید که عملگر کوانتومی زیر را روی دو کیوبیت اعمال کند:

$$U_x(\alpha) := e^{i\alpha(\sigma_x\otimes\sigma_x)} \tag{۹۴}$$

ج: مداری کوانتومی بسازید که عملگر زیر را روی دو کیوبیت اعمال کند:

$$U_y(\beta) := e^{i\beta(\sigma_y\otimes\sigma_y)}. \tag{۹۵}$$

د: مداری کوانتومی بسازید که عملگر زیر را روی دو کیوبیت اعمال کند:

$$\Omega(\alpha,\beta,\gamma) := e^{i(\alpha\sigma_x\otimes\sigma_x+\beta\sigma_y\otimes\sigma_y+\gamma\sigma_z\otimes\sigma_z)}. \tag{۹۶}$$

۷ قدردانی

این درسنامه را آقای حسین محمدی دانشجوی دانشکده فیزیک در آبان ماه ۱۴۰۱ به دقت خوانده و اشکالات متعدد آن را به من یادآوری کردند. برای این لطف بزرگ از ایشان تشکر می کنم.